CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm cực trị hàm số :

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $D\left(D\subset \mathbb{R}\right)$ và $x_0 \in D$

$a)$ x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 sao cho $\left(a;b\right)\subset D$ và $f\left(x\right)<f\left(x_0\right)$ với mọi $x\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$. Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

$b)$ x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 sao cho $\left(a;b\right)\subset D$ và $f\left(x\right)>f\left(x_0\right)$ với mọi $x\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$. Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0.

Như vậy : điểm cực trị phải là một điểm trong của tập hợp $D\left(D\subset\mathbb{R}\right)$

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị:

Định lý 1: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó , nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'\left(x_0\right)=0$

Chú ý :

- Đạo hàm f' **<u>có thể</u>** bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
- Hàm số **<u>có thể</u>** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm .
- Hàm số chỉ **<u>có thể</u>** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm .

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị:

Định lý 2: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $\left(a;x_0\right)$ và $\left(x_0;b\right)$. Khi đó :

$a)$ Nếu $\begin{cases} f'\left(x_0\right)<0, x\in\left(a;x_0\right)\\ f'\left(x_0\right)>0, x\in\left(x_0;b\right)\end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0. Nói một cách khác , nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

x	a		x_0		b
$f'\left(x\right)$		$-$		$+$	
$f\left(x\right)$	$f\left(a\right)$	$\searrow$	$f\left(x_0\right)$	$\nearrow$	$f\left(b\right)$

$b)$ Nếu $\begin{cases} f'\left(x_0\right)>0, x\in\left(a;x_0\right)\\ f'\left(x_0\right)<0, x\in\left(x_0;b\right)\end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0. Nói một cách khác , nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	
	$f(a)$				$f(b)$

Định lý 3: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

$a)$ Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

$b)$ Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

4. Quy tắc tìm cực trị:

Quy tắc 1: Áp dụng định lý 2

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các điểm x_i $(i=1,2,3...)$ tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Xét dấu của $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số có cực trị tại điểm x_0.

Quy tắc 2: Áp dụng định lý 3

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các nghiệm x_i $(i=1,2,3...)$ của phương trình $f'(x)=0$.
- Với mỗi x_i tính $f''(x_i)$.

− Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

− Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Ví dụ 1 : Tìm cực trị của các hàm số :

$a)$ $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+\dfrac{5}{3}$

$b)$ $f(x)=|x|(x+2)$

$c)$ $f(x)=\sqrt{|x|}(x-3)$

$d)$ $f(x)=|x|$

Giải :

$a)$ $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+\dfrac{5}{3}$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=x^2-2x-3$ $\qquad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1, x=3$

Cách 1. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{10}{3}$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$				$-\dfrac{22}{3}$		

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-1, f\left(-1\right)=\dfrac{10}{3}$, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=3, f\left(3\right)=-\dfrac{22}{3}$

Cách 2 : $f''\left(x\right)=2x-2$

Vì $f''\left(-1\right)=-4<0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-1, f\left(-1\right)=\dfrac{10}{3}$.

Vì $f''\left(3\right)=4>0$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=3, f\left(3\right)=-\dfrac{22}{3}$.

$b)\ f\left(x\right)=\left|x\right|\left(x+2\right)=\begin{cases} x\left(x+2\right) & khi\ \ x\ge 0 \\ -x\left(x+2\right) & khi\ \ x<0 \end{cases}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(x\right)=\begin{cases} 2x+2>0 & khi\ \ x>0 \\ -2x-2 & khi\ \ x<0 \end{cases}$ $\qquad f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=-1$

Hàm số liên tục tại $x=0$, không có đạo hàm tại $x=0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-1, f\left(-1\right)=1$, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0, f\left(0\right)=0$

$c)\ f\left(x\right)=\sqrt{\left|x\right|}\left(x-3\right)$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. $f\left(x\right)=\begin{cases} \sqrt{x}\left(x-3\right) & khi\ \ x\ge 0 \\ \sqrt{-x}\left(x-3\right) & khi\ \ x<0 \end{cases}$.

Ta có $f'\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{3\left(x-1\right)}{2\sqrt{x}} & khi\ \ x>0 \\ \dfrac{3-x}{2\sqrt{-x}}+\sqrt{-x}>0 & khi\ \ x<0 \end{cases}$ $\qquad f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đạt điểm cực đại tại điểm $x=0, f\left(0\right)=0$, hàm số đạt điểm cực tiểu tại điểm $x=1, f\left(1\right)=-2$

$d)\ f\left(x\right)=\left|x\right|$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. $f\left(x\right) = \begin{cases} x \ \ khi \ \ x \ge 0 \\ -x \ \ khi \ \ x < 0 \end{cases}$.

Ta có $f'\left(x\right) = \begin{cases} 1 \ \ khi \ \ x > 0 \\ -1 \ \ khi \ \ x < 0 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	||	$+$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt điểm cực đại tại điểm $x = 0, f\left(0\right) = 0$

Ví dụ 2 : Tìm cực trị của các hàm số sau :

$a)\ \ f\left(x\right) = x\sqrt{4 - x^2}$	$c)\ \ f\left(x\right) = 2\sin 2x - 3$
$b)\ \ f\left(x\right) = 3 - 2\cos x - \cos 2x$	$d)\ \ f\left(x\right) = x - \sin 2x + 2$

Giải :

$a)\ \ f\left(x\right) = x\sqrt{4 - x^2}$

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $\left[-2;2\right]$

Ta có $a)\ \ f'\left(x\right) = \dfrac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}, x \in \left(-2;2\right)$ $\qquad f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

$f'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm $-\sqrt{2}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -\sqrt{2}$, $f\left(-\sqrt{2}\right) = -2$

$f'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm $\sqrt{2}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \sqrt{2}$, $f\left(\sqrt{2}\right) = 2$

Hoặc dùng bảng biến thiên hàm số để kết luận:

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f\left(x\right)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$b)\ \ f\left(x\right) = 3 - 2\cos x - \cos 2x$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 2\sin x + 2\sin 2x = 2\sin x(1 + 2\cos x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(x) = 2\cos x + 4\cos 2x$

$f''\left(\pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = 6\cos\dfrac{2\pi}{3} = -3 < 0$. Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$, $f\left(\pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = 4\dfrac{1}{2}$

$f''(k\pi) = 2\cos k\pi + 4 > 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = k\pi$, $f(k\pi) = 2(1 - \cos k\pi)$

$c)$ $f(x) = 2\sin 2x - 3$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 4\cos 2x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$f''(x) = -8\sin 2x \quad , \quad f''\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = -8\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases}-8 & khi \quad k = 2n\\ 8 & khi \quad k = 2n + 1\end{cases}$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi; f\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right) = -1$ và đạt cực đại tại

$x = \dfrac{\pi}{4} + (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}; f\left(\dfrac{\pi}{4} + (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}\right) = -5$

$d)$ $f(x) = x - \sin 2x + 2$

Tương tự trên hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và đạt cực tiểu tại các điểm

$x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3 :

1. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, hàm số $y = f(x,m) = \dfrac{x^3 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ luôn có cực đại và cực tiểu .
2. Với giá trị nào của m ,hàm số $y = f(x,m) = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx + m$ có cực đại , cực tiểu .
3. Với giá trị nào của m ,hàm số $y = f(x,m) = \dfrac{mx^2 + x + m}{x + m}$ không có cực đại , cực tiểu .
4. Xác định các giá trị của tham số k để đồ thị của hàm số $y = f(x,k) = kx^4 + (k-1)x^2 + 1 - 2k$ chỉ có một điểm cực trị.
5. Xác định m để đồ thị của hàm số $y = f(x,m) = y = \dfrac{1}{2}x^4 - mx^2 + \dfrac{3}{2}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$, $x \neq m$, $g(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$

Dấu của $g(x)$ cũng là dấu của y' và $\Delta'_g = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0$, $\forall m$. Do đó $\forall m$ thì $g(x) = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = m - 1, x_2 = m + 1$ thuộc tập xác định .

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

y' đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm $x_1 = m - 1$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x_1 = m - 1$

y' đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm $x_2 = m + 1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_2 = m + 1$

2 .Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 3m(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ 3(-m^2 - 2m + 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $-3 < m < 1, m \neq -2$.

3 . Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và có đạo hàm $y' = \dfrac{mx^2 + 2m^2x}{(x+m)^2}$

Hàm số không có cực đại , cực tiểu khi $y' = 0$ không đổi dấu qua nghiệm , khi đó phương trình $g(x) = mx^2 + 2m^2x = 0, (x \neq -m)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

- Xét $m = 0 \Rightarrow y' = 0, \forall x \neq -m \Rightarrow m = 0$ thoả .
- Xét $m \neq 0$. Khi đó $\Delta' = m^4$

Vì $\Delta' = m^4 > 0, \forall m \neq 0 \Rightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên không có giá trị tham số m để $g(x) = mx^2 + 2m^2x = 0, (x \neq -m)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

Vậy $m = 0$ thoả mãn yêu cầu bài toán .

4 . Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4kx^3 - 2(k-1)x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2kx^2 + k - 1 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Hàm số chỉ có một cực trị khi phương trình $y'=0$ có một nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi x đi qua nghiệm đó .Khi đó phương trình $2kx^2+k-1=0 \quad (*)$ vô nghiệm hay có nghiệm kép $x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ \begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta' = -2k(k-1)\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k<0 \vee k\geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k\leq 0 \\ k\geq 1 \end{array}\right.$$

Vậy $k\leq 0 \vee k\geq 1$ là giá trị cần tìm .

5 . Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 2x^3 - 2mx$ $\qquad y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2 = m \quad (*) \end{array}\right.$

Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại khi phương trình $y'=0$ có một nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi x đi qua nghiệm đó Khi đó phương trình $x^2=m \quad (*)$ vô nghiệm hay có nghiệm kép $x=0$

$\Leftrightarrow m\leq 0$

Vậy $m\leq 0$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4 :

1. Xác định giá trị tham số m để hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$.
2. Xác định giá trị tham số m để hàm số $y=f(x)=x^3+(m+3)x^2+1-m$ đạt cực đại tại $x=-1$.
3. Xác định giá trị tham số m để hàm số $y=f(x)=x^3-6x^2+3(m+2)x-m-6$ đạt cực đại và cực tiểu đồng thời hai giá trị cực trị cùng dấu.
4. Xác định giá trị tham số m để hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+mx+2}{x-1}$ có điểm cực tiểu nằm trên Parabol $(P): y=x^2+x-4$

Giải :

1. Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ và có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}, x\neq -m$

Nếu hàm số đạt cực đại tại $x=2$ thì $f'(2)=0 \Leftrightarrow m^2+4m+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-1 \end{array}\right.$

$m=-3$, ta có $f'(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}, x\neq 3$ $\qquad f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$-\infty$ $\quad$ $-\infty$ $\quad$ 5

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, do đó $m = -3$ thoả mãn .
Tương tự với $m = -1$
Cách 2 :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2}, x \neq -m$

$y'' = \dfrac{2}{(x+m)^3}, x \neq -m$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ khi

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{(2+m)^2} = 0 \\ \dfrac{2}{(2+m)^3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 3 = 0 \\ m \neq -2 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \vee m = -3 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

2. Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2(m+3)x = x(3x + 2m + 6) \quad \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{2m+6}{3} \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\frac{2m+6}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1 \Leftrightarrow -\dfrac{2m+6}{3} = -1 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$.

3. Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y' = 3x^2 - 12x + 3(m+2)$.

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 9(m+2) > 0$

$\Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

$y = \dfrac{1}{3}(x-2).\left[3x^2 - 12x + 3(m+2)\right] + 2(m-2)x + m - 2 = \dfrac{1}{3}(x-2).y' + 2(m-2)x + m - 2$

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình

$g(x) = 3x^2 - 12x + 3(m+2) = 0$.

Trong đó :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{3}(x_1 - 2).y'(x_1) + 2(m-2)x_1 + m - 2 \\ y'(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 2(m-2)x_1 + m - 2$$

$$\begin{cases} y_2 = \frac{1}{3}(x_1 - 2).y'(x_2) + 2(m-2)x_2 + m - 2 \\ y'(x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = 2(m-2)x_2 + m - 2$$

Theo định lý Vi-ét , ta có : $x_1 + x_2 = 4, x_1x_2 = m + 2$

Theo bài toán :

$$y_1.y_2 > 0 \Leftrightarrow \left[2(m-2)x_1 + m - 2\right]\left[2(m-2)x_2 + m - 2\right] > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2(2x_1+1)(2x_2+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2\left[4x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 1\right] > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2\left[4x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 1\right] > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2(4m+17) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{17}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$$

So với điều kiện bài toán , vậy $-\frac{17}{4} < m < 2$ là giá trị cần tìm .

4. Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - m - 2}{(x-1)^2}, x \neq 1$ $\qquad g(x) = x^2 - 2x - m - 2$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g(x) = 0, x \neq 1$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\begin{cases} \Delta' = 1 - (-m-2) > 0 \\ g(1) = -m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 > 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$$

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{m+3} \Rightarrow y_1 = 1 - \sqrt{m+3} + m + 1 + \dfrac{m+3}{-\sqrt{m+3}} = m + 2 - 2\sqrt{m+3} \\ x_2 = 1 + \sqrt{m+3} \Rightarrow y_2 = 1 + \sqrt{m+3} + m + 1 + \dfrac{m+3}{\sqrt{m+3}} = m + 2 + 2\sqrt{m+3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bàng biến thiên suy ra $A\left(1 + \sqrt{m+3}; m + 2 + 2\sqrt{m+3}\right)$ là điểm cực tiểu của hàm số .

$$A \in (P) \Leftrightarrow m + 2 + 2\sqrt{m+3} = \left(1 + \sqrt{m+3}\right)^2 + 1 + \sqrt{m+3} - 4 \Leftrightarrow \sqrt{m+3} = 1$$

$A \in (P) \Leftrightarrow m + 2 + 2\sqrt{m+3} = \left(1 + \sqrt{m+3}\right)^2 + 1 + \sqrt{m+3} - 4 \Leftrightarrow \sqrt{m+3} = 1 \Leftrightarrow m = -2$

So với điều kiện bài toán ,vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5 :

1. Tìm các hệ số a,b,c,d sao cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$
2. Tìm các hệ số a,b,c sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1;0)$.
3. Tìm các hệ số a,b sao cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + ab}{ax + b}$ đạt cực trị tại điểm $x = 0$ và $x = 4$.

Giải :

1. Tìm các hệ số a,b,c,d sao cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b > 0 \end{cases} \quad (1)$

Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b < 0 \end{cases} \quad (2)$

$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$, $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1 \ \ hay \ \ a + b + c = 1 \ \ do \ \ d = 0 \quad (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $a = -2, b = 3, c = 0, d = 0$

Ta kiểm tra lại $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Ta có $f'(x) = -6x^2 + 6x$, $f''(x) = -12x + 6$

$f''(0) = 6 > 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

$f''(1) = -6 < 0$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

Vậy : $a = -2, b = 3, c = 0, d = 0$

2. Tìm các hệ số a,b,c sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1;0)$.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Hàm số đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x=-2$ khi và chỉ khi $\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-b=12 \\ 4a-2b+c=8 \end{cases} \; (1)$

Đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1;0)$ khi và chỉ khi $f(1)=0 \Leftrightarrow a+b+c+1=0 \; (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $a=3, b=0, c=-4$.

3. Hàm số đã cho xác định khi $ax+b \neq 0$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{a^2x^2+2abx+b^2-a^2b}{(ax+b)^2}$

- Điều kiện cần :

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=0$ và $x=4$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b^2-a^2b}{b^2}=0 \\ \dfrac{16a^2+8ab+b^2-a^2b}{(4a+b)^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-a^2b=0 \\ b\neq 0 \\ 16a^2+8ab+b^2-a^2b=0 \\ 4a+b\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a^2>0 \\ 8a^2(a+2)=0 \\ 4a+a^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$$

- Điều kiện đủ :

$$\begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow y'=\dfrac{x^2-4x}{(-x+2)^2} \qquad y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên :hàm số đạt cực trị tại điểm $x=0$ và $x=4$. Vậy $a=-2, b=4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 6:

1. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2 \;\; (C)$. Hãy xác định tất cả các giá trị của a để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C)ở về hai phía khác nhau của đường tròn (phía trong và phía ngoài): $(C_a): x^2+y^2-2ax-4ay+5a^2-1=0$

2. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+m^2x+2m^2-5m+3}{x}$. Tìm $m>0$ để hàm số đạt cực tiểu tại $x\in(0;2m)$

3. $y=f(x)=x^3-3x^2+m^2x+m.$ có cực đại , cực tiểu và hai điểm đó đối xứng nhau qua

đường thẳng $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m thì hàm số $y=f(x)\frac{x^2-\left(m+1\right)x-m^2+4m-2}{x-1}$.có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m thì hàm số $y=f(x)=\frac{x^2+\left(m+2\right)x+3m+2}{x+1}$ có giá trị cực trị , đồng thời $y_{CĐ}^2+y_{CT}^2>\frac{1}{2}$.

Giải :

1. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=3x^2-6x$ $\quad y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=2\\x=2\Rightarrow y=-2\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $A\left(0;2\right),B\left(2;-2\right)$. Hai điểm $A\left(0;2\right),B\left(2;-2\right)$ở về hai phía của hai đường tròn $\left(C_a\right)$ khi

$$\Leftrightarrow P_{A/\left(C_a\right)}.P_{B/\left(C_a\right)}<0\Leftrightarrow\left(5a^2-8a+3\right)\left(5a^2+4a+7\right)<0\Leftrightarrow 5a^2-8a+3<0\Leftrightarrow\frac{3}{5}<a<1$$

Cách 2 : $\left(C_a\right):x^2+y^2-2ax-4ay+5a^2-1=0\Leftrightarrow\left(C_a\right):\left(x-a\right)^2+\left(y-2a\right)^2=1$

$\left(C_a\right)$ có tâm $I\left(a;2a\right)$ và bán kính $R=1$

Ta có : $IB=\sqrt{\left(a-2\right)^2+\left(2a+2\right)^2}=\sqrt{5a^2+4a+8}=\sqrt{5\left(a+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{36}{5}}\ge\frac{6}{\sqrt{5}}>1=R\Rightarrow$ điểm B nằm ngoài $\left(C_a\right)$, do đó điểm A nằm trong đường tròn

$\left(C_a\right)\Leftrightarrow IA<1\Leftrightarrow\sqrt{a^2+\left(2-2a\right)^2}<1\Leftrightarrow 5a^2-8a+3<0\Leftrightarrow\frac{3}{5}<a<1$

2. Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và có đạo hàm

$y'=\frac{x^2-2m^2+5m-3}{x^2}=\frac{g\left(x\right)}{x^2},x\ne 0$ Với $g\left(x\right)=x^2-2m^2+5m-3$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x\in\left(0;2m\right)\Leftrightarrow g\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$ thoả

$$x_1<0<x_2<2m\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\1.g\left(0\right)<0\\1.g\left(2m\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\-2m^2+5m-3<0\\2m^2+5m-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\\left[\begin{array}{l}m<1\\m>\frac{3}{2}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<m<1\\m>\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $\frac{1}{2} < m < 1 \vee m > \frac{3}{2}$.

3. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x + m^2$.

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$ .Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 2$, $x_1.x_2 = \frac{m^2}{3}$.

Gọi $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số và I là trung điểm của đoạn AB .

Đường thẳng AB có hệ số góc

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3 - 3\left(x_2^2 - x_1^2\right) + m^2\left(x_2 - x_1\right)}{x_2 - x_1} = \left(x_1 + x_2\right)^2 - x_1x_2 - 3\left(x_1 + x_2\right) + m^2$$

$$k_{AB} = 4 - \frac{m^2}{3} - 6 + m^2 = \frac{2m^2 - 6}{3}$$

Đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\left(\Delta\right)$ có hệ số góc $k = \frac{1}{2}$

Hai điểm $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $\left(\Delta\right)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} AB \perp \Delta \\ I \in \Delta \end{cases}$

- $AB \perp \Delta \Leftrightarrow k_{AB}.k = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\left(\frac{2m^2 - 6}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow m = 0$
- $m = 0 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$ $\quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow A\left(0;0\right) \\ x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = -4 \Rightarrow B\left(2;-4\right) \end{array}\right. \Rightarrow I\left(1;-2\right)$

Dễ thấy $I\left(1;-2\right) \in \Delta$

Vậy $m = 0$ thoả mãn yêu cầu bài toán .

4. Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{\left(x - 1\right)^2} = \frac{g\left(x\right)}{\left(x - 1\right)^2}, x \ne 1$ $\quad g\left(x\right) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g\left(x\right) = 0, x \ne 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g\left(1\right) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 3m - 2 > 0 \\ m^2 - 3m + 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2$$

Gọi $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g\left(x\right) = 0, x \ne 1$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_1 = 1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_2 = 1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \end{array}\right.$

$$y_1.y_2 = \left(1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}\right)\left(1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}\right) = \left(1 - m\right)^2 - 4\left(-m^2 + 3m - 2\right)$$

$y_1.y_2 = 5m^2 - 14m + 9 = 5\left(m - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} \ge -\frac{4}{5} \Rightarrow \min y_1.y_2 = -\frac{4}{5}$ khi $m = \frac{7}{5}$

So với điều kiện , vậy $m = \frac{7}{5}$ là giá trị cần tìm .

5. Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có : $y' = \frac{x^2 + 2x - 2m}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}, x \ne -1$ $\quad g(x) = x^2 + 2x - 2m$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g(x) = 0, x \ne -1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ -2m - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$

Gọi $A(x_1; y_1 = 2x_1 + m + 2), B(x_2; y_2 = 2x_2 + m + 2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0, x \ne -1$

Theo định lý Vi- ét $x_1 + x_2 = -2,\ x_1.x_2 = -2m$

Theo bài toán :

$y_{CĐ}^2 + y_{CT}^2 = y_1^2 + y_2^2 = (2x_1 + m + 2)^2 + (2x_2 + m + 2)^2 = 4(x_1^2 + x_2^2) + 4(m+2)(x_1 + x_2) + 2(m+2)^2$

$y_1^2 + y_2^2 = 4\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] + 4(m+2)(x_1 + x_2) + 2(m+2)^2 = 4(4 + 4m) - 8(m+2) + 2(m+2)^2$

$y_1^2 + y_2^2 = 2m^2 + 16m + 8$

Xét $f(m) = 2m^2 + 16m + 8, m > -\frac{1}{2}$ $\qquad f'(m) = 4m + 16 > 0, \forall m > -\frac{1}{2}$

Do đó hàm số $f(m)$ đồng biến trên khoảng $m \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và $f(m) > f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, m \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Vậy $y_{CĐ}^2 + y_{CT}^2 > \frac{1}{2}, m \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Ví dụ 7:

1. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ có cực đại , cực tiểu đồng thời hoành độ cực đại cực tiểu x_1, x_2 thỏa $x_1 + 2x_2 = 1$

2. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số $y = \frac{mx^2 + (m^2+1)x + 4m^3 + m}{x + m}$ tương ứng có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (II) và một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (IV) của mặt phẳng tọa độ .

Giải :

1. Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi y' đổi dấu hai lần qua nghiệm x, tức là phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Theo định lý Vi – ét và yêu cầu bài toán, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \quad (gt) \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ \left(\dfrac{3m-4}{m}\right)\left(\dfrac{2-m}{m}\right) = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0 \; (m \neq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{3} \\ m = 2 \end{array}\right.$$

So với điều kiện bài toán , vậy $m = \dfrac{2}{3} \vee m = 2$ là giá trị cần tìm .

2. Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và $y = mx + 1 + \dfrac{4m^3}{x+m} \; (m \neq 0)$

Ta có : $y' = \dfrac{mx^2 + 2m^2x - 3m^3}{(x+m)^2}, x \neq -m$

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì $x_1, x_2 \; (x_1 < x_2)$ là nghiệm của phương trình $g(x) = mx^2 + 2m^2x - 3m^3 = 0, x \neq -m$

Đồ thị của hàm số có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (II) và một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (IV) của mặt phẳng tọa độ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ thuộc góc phần tư thứ (II)} \\ B \text{ thuộc góc phần tư thứ (IV)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \; x_1 < 0 < x_2 & (1) \\ \bullet \; y_2 < 0 < y_1 & (2) \\ \bullet \; \text{Hệ số góc của tiệm cận xiên nhỏ hơn 0} & (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow m.g(0) < 0 \Leftrightarrow -3m^4 < 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \quad (a)$

$(2) \Leftrightarrow$ Đồ thị của hàm số không cắt trục $Ox \Leftrightarrow mx^2 + (m^2+1)x + 4m^3 + m = 0 \; (x \neq -m)$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (m^2+1)^2 - 4m(4m^3 + m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -15m^4 - 2m^2 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 > \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ m > \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \quad (b)$$

$(3) \Leftrightarrow m < 0 \; (c)$

Từ (a) (b) (c) suy ra $m < -\frac{1}{\sqrt{5}}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 8:

Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 - (m+2)x - 1$, có đồ thị là (C_m), m là tham số.

1. Chứng minh rằng hàm số luôn có một cực đại , một cực tiểu .
2. Khi $m = 1$, đồ thị hàm số là (C)

$a)$. Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ và tiếp xúc với đồ thị (C).

$b)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C).

Giải :

Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$.

1. Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2(m-1)x - (m+2)$.

Vì $\Delta' = m^2 + m + 7 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình $f'(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt . Do đó đồ thị của hàm số luôn có một cực đại , một cực tiểu với mọi giá trị của tham số m .

2. $m = 1 \Rightarrow (C) : f(x) = x^3 - 3x - 1$

$a)$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là toạ độ tiếp điểm của đường thẳng (d) và đồ thị (C)

$\Rightarrow y_0 = x_0^3 - 3x_0 - 1, y_0' = 3x_0^2 - 3$. Đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ khi

$y_0'\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = -3 \Leftrightarrow x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, y_0 = -1$

Vậy đường thẳng $(d) : y = -3x - 1$ và tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm $(0;-1)$.

$b)$. Đồ thị (C) có điểm cực đại là $A(-1;1)$, điểm cực tiểu là $B(1;-3)$. Do đó đường thẳng qua AB là : $y = -2x - 1$.

Ví dụ 9:

1. Xác định giá trị tham số m để hàm số $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$ có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung .
2. Xác định giá trị tham số m để hàm số $f(x) = \frac{x^2 - (m+1)x + 3m + 2}{x - 1}$ có hai điểm cực đại và cực tiểu cùng dấu .
3. Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$.Định m để hàm số đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.
4. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng $\Delta : x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

Giải :

1. Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + m^2 - 3m + 2$

Hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 3.f'(0) < 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$

Vậy giá trị cần tìm là $1 < m < 2$.

2. Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2m - 1}{(x-1)^2}, x \neq 1$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ hay phương trình $g(x) = x^2 - 2x - 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$, khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > 0 \\ -2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1 \quad (1)$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của $g(x) = 0$

Khi đó: $$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{2m+2} \Rightarrow y_1 = 1 - \sqrt{2m+2} - m + \dfrac{2m+2}{-\sqrt{2m+2}} = 1 - m - 2\sqrt{2m+2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2m+2} \Rightarrow y_2 = 1 + \sqrt{2m+2} - m + \dfrac{2m+2}{\sqrt{2m+2}} = 1 - m + 2\sqrt{2m+2} \end{array} \right.$$

Hai giá trị cực trị cùng dấu khi

$y_1.y_2 > 0 \Leftrightarrow \left(1 - m - 2\sqrt{2m+2}\right)\left(1 - m + 2\sqrt{2m+2}\right) > 0 \Leftrightarrow (1-m)^2 - 4(2m+2) > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 10m - 7 > 0 \Leftrightarrow m < 5 - 4\sqrt{2} \vee m > 5 + 4\sqrt{2} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $-1 < m < 5 - 4\sqrt{2} \vee m > 5 + 4\sqrt{2}$

Cách khác : Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2m - 1}{(x-1)^2}, x \neq 1$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ hay phương trình

$g(x) = x^2 - 2x - 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > 0 \\ -2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$

Hai giá trị cực trị cùng dấu khi đồ thị của hàm số $y = 0$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $x \neq 1$ hay phương trình $x^2 - (m+1)x + 3m + 2 = 0 \quad (x \neq 1)$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$. Tức là

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4(3m+2) > 0 \\ 1 - (m+1) + 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 7 > 0 \\ 2m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 5 - 4\sqrt{2} \\ m > 5 + 4\sqrt{2} \end{array} \right. \\ m \neq -1 \end{cases}$$

So với điều kiện , giá trị $-1 < m < 5 - 4\sqrt{2} \vee m > 5 + 4\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm .

3. Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = -3x^2 + 6(m+1)x - (3m^2 + 7m - 1)$.Hàm số đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn $1 \Leftrightarrow f'(x) = -3x^2 + 6(m+1)x - (3m^2 + 7m - 1) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện :

$$\left[\begin{array}{ll} x_1 < 1 < x_2 & (1) \\ x_1 < x_2 \le 1 & (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1) \Leftrightarrow -3.f'(1) < 0 \\ (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -3.f'(1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(3m^2 + m - 4) < 0 \\ \begin{cases} 9(m+1)^2 - 3(3m^2 + 7m - 1) > 0 \\ 3(3m^2 + m - 4) \ge 0 \\ m + 1 < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ \begin{cases} -3m + 12 > 0 \\ 3m^2 + m - 4 \ge 0 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ \begin{cases} m < 4 \\ m \le -\dfrac{4}{3} \vee m \ge 1 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ m \le -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow m < 1$$

4. Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x+1)^2}, x \ne -1$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi $f'(x)$ đổi dấu hai lần qua nghiệm x hay phương trình $g(x) = x^2 + 2x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2m > 0 \\ 2m - 3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$$

Gọi $A(x_1; y_1 = 2x_1 + 2m), B(x_2; y_2 = 2x_2 + 2m)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0, x \ne 1$. Theo định lý Vi ét $x_1 + x_2 = -2,\ x_1.x_2 = -2m$

Theo yêu cầu bài toán

$$d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow \frac{|x_1 + y_1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_2 + y_2 + 2|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |3x_1 + 2m + 2| = |3x_2 + 2m + 2|$$

$$\Leftrightarrow (3x_1 + 2m + 2)^2 = (3x_2 + 2m + 2)^2 \Leftrightarrow (3x_1 + 2m + 2)^2 - (3x_2 + 2m + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left[3(x_1 + x_2) + 4m + 4\right] = 0 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 4m + 4 = 0 \quad (x_1 \ne x_2) \Leftrightarrow 3(-2) + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

So với điều kiện, vậy $m = \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm .

Ví dụ 10:

1. Chứng tỏ rằng chỉ có một điểm A duy nhất trên mặt phẳng toạ độ sao cho nó là điểm cực đại của đồ thị $f(x) = \dfrac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ ứng với một giá trị thích hợp của m và cũng là điểm cực tiểu của đồ thị ứng với một giá trị thích hợp khác. Tìm toạ độ của A.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại , cực tiểu đồng thời các điểm cực trị lập thành tam giác đều.

Giải :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2}, x \neq m \quad g(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1 \qquad \Delta_g = 1 > 0, \forall m$

Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \Rightarrow f(x_1) = -m^2 + m - 2 \Rightarrow M(m-1; -m^2 + m - 2) \\ x_2 = m + 1 \Rightarrow f(x_2) = -m^2 + m + 2 \Rightarrow N(m+1; -m^2 + m + 2) \end{array}\right.$

Đặt $A(x_0; y_0)$.Giả sử ứng với giá trị $m = m_1$ thì A là điểm cực đại và ứng với giá trị $m = m_2$ thì A là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số

Ta có: $\begin{cases} x_0 = m_1 - 1 \\ y_0 = -m_1^2 + m_1 - 2 \end{cases}; \begin{cases} x_0 = m_2 + 1 \\ y_0 = -m_2^2 + m_2 + 2 \end{cases}$

Theo bài toán , ta có : $\begin{cases} m_1 - 1 = m_2 + 1 \\ -m_1^2 + m_1 - 2 = -m_2^2 + m_2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = 2 \\ (m_1 - m_2)(m_1 + m_2 - 1) = -4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = 2 \\ m_1 + m_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{1}{2} \\ m_2 = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{1}{2} \\ y_0 = -\dfrac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$$

Vậy $A\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{7}{4}\right)$ là điểm duy nhất cần tìm thoả yêu cầu bài toán .

2. Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m) \qquad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \quad (*) \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có cực đại , cực tiểu khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và y'đổi dấu khi x qua các nghiệm đó , khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m > 0$

Khi đó :

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = m^4 + 2m \Rightarrow A(0; m^4 + 2m) \\ x = \pm\sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - m^2 + 2m \Rightarrow B(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m), C(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m) \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị A, B, C lập thành tam giác đều

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB = BC \end{cases} \Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m(m^3 - 3) = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}\ (m > 0)$$

Vậy $m = \sqrt[3]{3}$ là giá trị cần tìm .

Ví dụ 11:

1. Xác định tham số a để hàm số sau có cực đại: $y = -2x + 2 + a\sqrt{x^2 - 4x + 5}$

Giải :

1. Hàm số cho xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = -2 + \dfrac{a(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ $\quad y'' = \dfrac{a}{\sqrt{(x^2-4x+5)^3}}$

Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a(x_0-2)}{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}} = 2 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2} = \dfrac{a}{2} \quad (1) \\ a < 0 \end{cases}$

Với $a < 0$ thì $(1) \Rightarrow x_0 < 2$.

Xét hàm số : $f(x_0) = \dfrac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2}, x_0 < 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x_0) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2} = -1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x_0) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x_0^2-4x_0+5}}{x_0-2} = -\infty$

Ta có $f'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0-2)^2\sqrt{x_0^2-4x_0+5}} < 0, \forall x_0 \in (-\infty;2)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2
$f'(x)$		$-$	||
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ||

Phương trình (1) có nghiệm $x_0 < 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{2} < -1 \Leftrightarrow a < -2$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm cực trị của các hàm số sau :

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$

$b)\ f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 10$

$c)\ f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$d)\ f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2$

$e)\ f(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

$f)\ f(x) = \sqrt{8-x^2}$

$g)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$h)\ f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$

$i)\ f(x) = \sqrt{5-x^2}$

$j)\ f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

$k)\ f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \dfrac{4}{3}$

2. Tìm cực trị của các hàm số sau :

$a)\ f\left(x\right)=2x^3-9x^2+12x+3$

$b)\ f\left(x\right)=3x^4-4x^3-24x^2+48-3$

$c)\ f\left(x\right)=-5x^3+3x^2-4x+5$

$d)\ f\left(x\right)=x-3+\dfrac{9}{x-2}$

$e)\ f\left(x\right)=\dfrac{x^2+8x-24}{x^2-4}$

$f)\ f\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2+4}$

$g)\ f\left(x\right)=x\sqrt{3-x}$

$h)\ f\left(x\right)=x^2-2\,|\,x\,|+2$

Hướng dẫn : $h)\ f\left(x\right)=x^2-2\,|\,x\,|+2$

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+2x+2 & khi\ \ x<0\\ x^2-2x+2 & khi\ \ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow f'\left(x\right)=\begin{cases}2x+2 & khi\ \ x<0\\ 2x-2 & khi\ \ x>0\end{cases}$$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-1,x=1$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $A\left(0;2\right)$ và đạt cực tiểu tại các điểm $B\left(-1;1\right),C\left(1;1\right)$

3. Chứng minh rằng với mọi m đồ thị của hàm số $y=4x^3-mx^2-3x+m$ luôn có cực đại , cực tiểu và $x_{CĐ}.x_{CT}<0$

4. Cho hàm số $f\left(x\right)=x+p+\dfrac{q}{x+1}\quad\left(*\right)$

$a)$ Tìm các số thực p,q sao cho hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-2$ và $f\left(-2\right)=-2$.

$a_1)$ Trường hợp $p=q=1$, gọi M,N là điểm cực đại , cực tiểu của hàm số . Tính độ dài MN

$a_2)$ Trường hợp $p=q=1$,một đường thẳng $\left(t\right)$ luôn tiếp xúc với đồ thị hàm số $\left(*\right)$ tại K thuộc đồ thị hàm số $\left(*\right)$ đồng thời cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt E,F. Tìm tọa độ điểm K để K là trung điểm EF

$b)$ Giả sử $x_1;x_2$ lần lượt là hoành độ cực đại , cực tiểu của hàm số . Tìm các số thực p,q sao cho

$b_1)\ x_1=2x_2$ và $f\left(x\right)_1=\dfrac{1}{2}f\left(x_2\right)$

$b_2)$ Khoảng cách từ $A\left(x_1;f\left(x_1\right)\right)$ đến đường thẳng $y=x+p$ và $x+1=0$ bằng nhau .

Hướng dẫn :

$a)$ Tìm các số thực p,q sao cho hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-2$ và $f\left(-2\right)=-2$.

$$f'\left(x\right)=1-\frac{q}{\left(x+1\right)^2},x\ne -1$$

- $q\le 0$ thì $f'\left(x\right)>0,\forall x\ne -1$. Do đó hàm số $f\left(x\right)=x+p+\dfrac{q}{x+1}$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$. Hàm số không có cực đại , cực tiểu .

- $q > 0$ thì $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2 - q}{(x+1)^2}, x \neq -1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 - \sqrt{p}, x_2 = -1 + \sqrt{p}$. Hàm số đạt cực

đại tại điểm $x = -2$ và $f(-2) = -2$ khi $\begin{cases} x_1 = -2 \\ f(-2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ p = 1 \end{cases}$

5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \dfrac{2}{3}$

$a)$ Chứng minh rằng $m \neq 2$ thì đồ thị của hàm số luôn có cực đại và cực tiểu . Viết phương trình qua hai điểm cực đại và cực tiểu đó .

$b)$ Giả sử hoành độ cực đại, cực tiểu là x_1, x_2. Tìm m để :

$b_1)$ $x_1 + 3x_2 = 5$ $b_2)$ $4x_1 - 5x_2 = 2$ $b_3)$ $x_1^2 + x_2^2 = 5$ $b_4)$ $x_1 + x_2^2 \leq 3$

$c)$ Tìm m để :

$c_1)$ $x_1 < 0 < x_2 < 1$ $c_2)$ $x_1 < x_2 < 1$ $c_3)$ $-2 < x_1 < x_2 < 0$ $c_4)$ $x_1 < 0 < 1 < x_2 < 2$

Lưu ý : Để làm được câu $c)$ học sinh xem lại so sánh nghiệm phương trình bậc hai đã đề cập sách đại số 9 và có nhắc lại đại số 10.

6. Cho hàm số $f(x) = x^3 + px + q$

$a)$ Với điều kiện nào để hàm số f có một cực đại và một cực tiểu ?.

$b)$ Chứng minh rằng nếu giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu thì phương trình $x^3 + px + q = 0$ có 3 nghiệm phân biệt?.

$c)$ Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình $x^3 + px + q = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $4p^3 + 27q^2 < 0$

Hướng dẫn :

$a)$ $p < 0$

$c)$ $f\left(-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\right).f\left(\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\right) < 0$

7.

$a)$ Tìm a,b để các cực trị hàm số $f(x) = \dfrac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$ đều là những số dương và $x_0 = -\dfrac{5}{9}$ là điểm cực đại .

$b)$ Tìm a,b,c để các cực trị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có giá trị bằng 1 khi $x = 0$ và đạt cực trị tại $x = 2$, giá trị cực trị là -3.

$c)$ Tìm a,b để các cực trị hàm số $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 2}$ đạt cực trị tại $x = 3$ và đường tiệm cận xiên $y = x - 1$.

$d)$ Tìm a,b,c để các cực trị hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ có giá trị bằng 1 khi $x = 1$ và đường tiệm cận xiên của đồ thị vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{1-x}{2}$.

$e)$ Tìm các hệ số a,b,c sao cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu tại $A\left(1;-3\right)$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Hướng dẫn :

$a)$ $a=0$: Hàm số không có cực trị

$$a\neq 0\quad f'\left(x\right)=5a^2x^2+4ax-9\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{9}{5a}\\ x=\dfrac{1}{a}\end{array}\right.$$

Nếu $a<0$, $x_0=-\dfrac{5}{9}$ là điểm cực đại khi $x_0=-\dfrac{5}{9}=\dfrac{1}{a}\Leftrightarrow a=-\dfrac{9}{5}$, giá trị cực tiểu là số dương nên

$$f\left(x_{CT}\right)=f\left(-\frac{9}{5a}\right)=f\left(1\right)>0\Leftrightarrow b>\frac{36}{5}$$

Nếu $a>0$, $x_0=-\dfrac{5}{9}$ là điểm cực đại khi $x_0=-\dfrac{5}{9}=-\dfrac{9}{5a}\Leftrightarrow a=\dfrac{81}{25}$, giá trị cực tiểu là số dương nên

$$f\left(x_{CT}\right)=f\left(\frac{1}{a}\right)>0\Leftrightarrow b>\frac{400}{243}$$

Vậy $\begin{cases}a=-\dfrac{9}{5}\\ b>\dfrac{36}{5}\end{cases}$; $\begin{cases}a=\dfrac{81}{25}\\ b>\dfrac{400}{243}\end{cases}$

$b)$ $a=-3,b=0,c=1$

$c)$ $a=-3,b=3$

$d)$ $a=2,b=-3,c=0$

8. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3mx^2+3\left(2m-1\right)x+1,m$ là tham số

$a)$ Xác định m để hàm số đồng biến trên tập xác định .

$b)$ Xác định m để $f''\left(x\right)>6x$.

9.

$a)$ Định a để đồ thị của hàm số $y=2x^3-3\left(2a+1\right)x^2+6a\left(a+1\right)x+1$ có giá trị $y_{\text{CĐ}}>1$

Đáp số:

$a)$ $-\dfrac{3}{2}<a\neq 0$

10. Xác định khoảng đơn điệu và cực trị (nếu có) của hàm số :

$a)$ $f\left(x\right)=\sin 2x$

$b)$ $f\left(x\right)=\sin x+\cos x$

$c)$ $f\left(x\right)=\sin^2 x-\sqrt{3}\cos x, x\in\left[0;\pi\right]$

$d)$ $f\left(x\right)=2\sin x+\cos 2x, x\in\left[0;\pi\right]$

Hướng dẫn :

$a)$ $f\left(x\right)=\sin 2x$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = 2\cos 2x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}, l \in \mathbb{Z}$

$$f''(x) = -4\sin 2x, f''\left(\frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}\right) = -4\sin\left(\frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} -4 \ \ khi \ \ l = 2k \\ 4 \ \ khi \ \ l = 2k+1 \end{cases} , \ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$ là điểm cực đại của hàm số .

$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$ là điểm cực tiểu của hàm số .

Một bài toán tương tự : $f(x) = \sin 2x - x$, để ý xét $f'(x) = 0, x \in (-\pi, \pi) \Rightarrow x = ?$

$b)$ $f(x) = \sin x + \cos x$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

$$f''(x) = -\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -\sqrt{2} \ \ khi \ \ k = 2n \\ \sqrt{2} \ \ khi \ \ k = 2n+1 \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{\pi}{4} + n2\pi \ \ (n \in \mathbb{Z})$ là điểm cực đại của hàm số .

$x = \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi \ \ (n \in \mathbb{Z})$ là điểm cực tiểu của hàm số .

$c)$ $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3}\cos x, x \in [0;\pi]$

$f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3}\cos x \Rightarrow f'(x) = \sin x(2\cos x + \sqrt{3}), x \in (0;\pi)$

Vì $x \in (0;\pi) \Rightarrow \sin x > 0$ nên trong khoảng $(0;\pi)$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

- $f'(x) > 0, x \in \left(0;\frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{5\pi}{6}\right]$
- $f'(x) < 0, x \in \left(\frac{5\pi}{6};\pi\right) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên đoạn $\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$
- Vì $\begin{cases} f'(x) > 0, x \in \left(0;\frac{5\pi}{6}\right) \\ f'(x) < 0, x \in \left(\frac{5\pi}{6};\pi\right) \end{cases}$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{5\pi}{6}, f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$

Hoặc có thể kiểm tra $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = ... = -\frac{1}{2} < 0$

$d)$ $f(x) = 2\sin x + \cos 2x, x \in [0;\pi]$

$f(x) = 2\sin x + \cos 2x \Rightarrow f'(x) = 2\cos x(1 - 2\sin x), x \in (0;\pi)$

Trong khoảng $\left(0;\pi\right)$: $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{6}\\ x=\dfrac{5\pi}{6}\end{array}\right.$

Tương tự câu $a)$ học sinh tự xác định khoảng đơn điệu hàm số ; hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{\pi}{2}, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, hàm số đạt cực đại tại các điểm $x=\dfrac{\pi}{6}, f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}$ và $x=\dfrac{5\pi}{6}, f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}$.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN TRONG KỲ THI TÚ TÀI &TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

1. Tìm cực trị của hàm số :

$a)$ $f\left(x\right)=x.e^{-x}$

$b)$ $f\left(x\right)=x+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

$c)$ $f\left(x\right)=-2x+3\sqrt{x^2+1}$

$d)$ $f\left(x\right)=3x+\sqrt{10-x^2}$

$e)$ $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

2. Tìm m để đồ thị của hàm số có cực trị :

$a)$ $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2+mx-m}{x+m}$

$b)$ $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2+(m-1)x-m}{x+1}$

3. Tìm m để đồ thị của hàm số:

$a)$ $y=f\left(x\right)=x^3+mx^2+7x+3$ có cực trị .

$b)$ $y=f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}x^4-2x^3+\dfrac{3}{2}(m+2)x^2-(m+6)x+1$ có ba cực trị .

$c)$ $y=f\left(x\right)=-2x+m\sqrt{x^2+1}$ có cực tiểu.

$d)$ $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2-2x+m+2}{x+m-1}$ có cực đại , cực tiểu .

4. Xác định m để đồ thị của hàm số luôn có cực đại , cực tiểu?.

$a)$ $y=x^3+mx^2+3mx+5$

$b)$ $y=\dfrac{x^2+2mx-m}{x+m}$

$c)$ $y=\dfrac{mx^2+\left(m+1\right)x+1}{mx+2}$

Đáp số :

$a)$ $m<0 \vee m>9$

$b)$ $-1<m<0$

$c)$ $m<2, m\neq 0$

5. Chứng minh rằng với mọi m thì đồ thị của hàm số luôn có cực đại , cực tiểu ?.

$a)\quad y = f\left(x\right) = x^4 - \frac{4}{3}mx^3 - 2x^2$

$c)\quad y = f\left(x\right) = \frac{x^2 - mx + m}{x - 1}$

$b)\quad y = f\left(x\right) = \frac{x^2 + mx + 2m - 3}{x + 2}$

6.

$a)$ Với giá trị nào của m ,hàm số $y = f\left(x, m\right) = \frac{x^2 + 2m^2x + m^2}{x + 1}$ có cực đại , cực tiểu

$b)$ Với giá trị nào của m ,hàm số $y = f\left(x, m\right) = \left(m - 3\right)x^3 - 2mx^2 + 3$ không có cực đại , cực tiểu

Đáp số :

$a)\quad -1 < m < 1$

$b)\quad m = 0$

7. Tìm m để đồ thị của hàm số:

$a)\quad y = f\left(x\right) = x^3 + 2mx^2 + m^2$ đạt cực đại tại $x = 1$

$b)\quad y = f\left(x\right) = \frac{x^2 + 3mx + 5}{mx + 1}$ đạt cực đại tại $x = -1 - \sqrt{3}$

$c)\quad y = f\left(x\right) = x^3 - \left(m + 3\right)x^2 + mx + m + 5$ đạt cực tiểu tại $x = 2$

$d)\quad y = f\left(x\right) = -\left(m^2 + 5m\right)x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$ đạt cực đại tại $x = 1$

$e)\quad y = f\left(x\right) = \frac{x^2 + \left(m - 1\right)x + 1}{x + m - 1}$ đạt cực đại tại $x = 2$

8. Tìm m để đồ thị của hàm số:

$a)\quad y = f\left(x\right) = \frac{x^2 + mx + 2m - 3}{x + 2}$ có cực đại , cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $x + 2y + 8 = 0$.

$b)\quad y = f\left(x\right) = x^3 - 6x^2 + 3(m + 2)x - m - 6$.có hai cực trị trái dấu .

$c)\quad y = f\left(x\right) = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - 1}$ có cực đại , cực tiểu thoả mãn $\left|y_{CD} - y_{CT}\right| > 8$.

$d)\quad y = f\left(x\right) = \frac{-x^2 + 3x + 2m}{x - 4}$ có cực đại , cực tiểu thoả mãn $y_{CD} - y_{CT} = 4$.

9. Tìm m để đồ thị của hàm số:

$a)\quad y = f\left(x\right) = \frac{2x^2 + (2m + 3)x + m^2 + 4m}{x + m}$ có cực đại , cực tiểu thoả mãn $y_{CD}.y_{CT} < 0$.

$b)\quad y = f\left(x\right) = \frac{1}{3}x^3 + (m + 3)x^2 + 4(m + 3)x + m^2 - m$ có hoành độ cực đại x_1 , cực tiểu x_2 thoả mãn $x_1 < -1 < x_2$.

$c)$ $y = f\left(x\right) = \dfrac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \dfrac{1}{3}$ có hoành độ cực đại x_1, cực tiểu x_2 thoả mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

$d)$ $y = f\left(x\right) = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu cách đều trục tung.

$e)$ $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1 - m$ có cực trị mà hoành độ cực trị nhỏ hơn 2

Đáp số

$e)$ $0 < m < 1$

10. Tìm m để đồ thị của hàm số:

$a)$ $y = f\left(x\right) = \dfrac{-x^2 + 3x + m}{x - 4}$ có giá trị cực đại , cực tiểu đồng thời $y_{CT} - y_{CĐ} = 4$

$b)$ $y = x^3 + 2\left(m-1\right)x^2 + \left(m^2 - 4m + 1\right)x - 2\left(m^2 + 1\right)$ có cực đại , cực tiểu x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right)$

$c)$ $y = \dfrac{m}{3}x^3 - \left(m+1\right)x^2 + \left(m-5\right)x - 1$ có cực đại , cực tiểu x_1, x_2 đồng thời hoành độ cực đại, cực tiểu thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x_1x_2 + 3\left(x_1 + x_2\right) - 4 < 0 \\ x_1^2 + x_2^2 > 24 \end{cases}$

$d)$ $y = x^3 - 6x^2 + 3mx + 2 - m$ có điểm cực đại $M_1\left(x_1; y_1\right)$ và điểm cực tiểu $M_2\left(x_2; y_2\right)$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{y_1 - y_2}{\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1x_2 + 2\right)} < 0$

Đáp số :

$a)$ $m = 3$

$b)$ $m = 1 \vee m = 5$

$c)$ $-\dfrac{1}{7} < m < 0$

$d)$ $-2 < m < 4$

11. Tìm m để đồ thị của hàm số:

$a)$ $y = f\left(x\right) == 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có cực đại , cực tiểu và các điểm cực đại , cực tiểu cách đều trục Oy

$b)$ $y = f\left(x\right) = x^3 - \dfrac{3m}{2}x^2 + m$ có cực đại , cực tiểu nằm về hai phía của đường phân giác thứ nhất mặt phẳng toạ độ của hệ Oxy.

$c)$ $y = f\left(x\right) = \dfrac{x^2 + mx - m + 8}{x - 1}$ có cực đại , cực tiểu nằm về hai phía đường thẳng $9x - 7y - 1 = 0$.

$d)$ $y = f\left(x\right) = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1.$ có đường thẳng đi qua cực đại , cực tiểu song song với đường thẳng $y = -x + 2009$

$e)$ $y = f(x) = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ có cực đại , cực tiểu thuộc đường thẳng $y = -4x$.

$f)$ $y = f\left(x\right) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + mx$ đạt cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ $x > m$

$g)$ $y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$ có cực đại , cực tiểu đồng thời hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox.

Hướng dẫn :

$f)$ $y' = x^2 + x + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $m < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m > 0 \\ 1.y'\left(m\right) = m^2 + 2m > 0 \\ \dfrac{S}{2} = -\dfrac{1}{2} > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ m < -2 \vee m > 0 \\ m < -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

$g)$ $0 < m < 4$